

# 中小企業間の連携が生み出す相互発展-数理モデルによる考察-

著者	穴澤 正宏, 沢田 康次, 佐藤 飛鳥
雑誌名	東北工業大学紀要 I 理工学編
号	32
ページ	91-99
発行年	2012-03-31
URL	<a href="http://id.nii.ac.jp/1241/00000121/">http://id.nii.ac.jp/1241/00000121/</a>

# 中小企業間の連携が生み出す相互発展

—— 数理モデルによる考察 ——

穴 澤 正 宏\*・沢 田 康 次\*\*・佐 藤 飛 鳥\*\*\*

## Mutual Development Produced by Cooperation between Small and Medium Enterprises : a Study based on Mathematical Models

Masahiro ANAZAWA, Yasuji SAWADA and Asuka SATO

### Abstract

This paper develops simple mathematical models to investigate the effect of cooperation between small and medium enterprises (SMEs) on their mutual development. The following two cases are investigated. In one case, two SMEs are in competition for orders from a large enterprise, and in the other, they are not in competition. In both cases, the effect of cooperation is shown to depend greatly on the degree of how much an improvement in the skill levels of the two SMEs expands the demand for the large enterprise. In addition, for the case of competing SMEs, the effect of cooperation is shown to depend on the way of how the large enterprise partitions orders between the two SMEs.

### 1 はじめに

地域経済の活性化を図り、地域産業の持続的発展を実現していくことは、地域及び我が国の将来にとって極めて重要である。しかし、地域の中小企業には、企業間の横の連携が十分でなく新しい技術を生み出す素地に乏しいことや、中国の興隆など国際環境の変化に応じた新しい展開や未来予測を行う時間と人材がないことなどの問題点も指摘されている。近年、我々は共同研究者とともに、中小企業間の緩やかな横の連携を促し、地域産業の発展につなげることを目指して、「企業生態学」という新しい学問領域を立ち上げた [1]。この企業生態学では、宮城県の中小企業群に焦点をあて、中小企業の現状を調査するとともに、数理的な生物生態学の研究手法 [2-5]を援用して、中小企業間の

緩やかな横の連携が生み出す効果を数理的に検証するためのモデルを開発することも目的の一つとしている。

この企業生態学では、これまでに、宮城県内の優良製造業者へのヒアリング調査により、優良中小企業の共通点を導き出すとともに、中小企業間の緩やかな横の連携の効果を調べる際の基礎となる数理モデルを提案してきた [1]。しかし、そこで提案されたモデルは、概念的な内容に主眼が置かれ、数理モデルより企業間の連携が生み出す効果を具体的に解析するまでには至っていなかった。

そこで、本稿では、上のモデルに改良を加え、実際に連携の効果を解析することができる数理モデルを改めて構築するとともに、そのモデルを用いて企業間の連携の効果を検証することを目指す。考察する状況は、図 1 にあるように、複数の中小企業が 1 つの大企業からの受注を元に会社を運営している状況である。これらの中小企業が、同じ製品を受注している場合は、これらは競合関係にあることになる。本稿では、2 つの中小企業が互いに競合関係にある場合、ない場合のそ

2011 年 10 月 19 日受理

\* 工学部環境情報工学科 准教授

\*\* 東北工業大学 学長

\*\*\* ライフデザイン学部経営コミュニケーション学科 講師

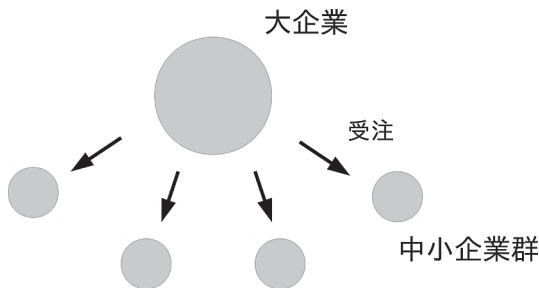


図1 本稿で考察する中小企業間の関係。1つの大企業からの受注を元に会社を運営している。同じ製品を受注している場合は、これらの中小企業は競合関係にあることになる。

れぞれに対して、企業間に協力関係を導入したときの効果を数理モデルに基づいて解析し、この効果の大きさがどのような条件に依存しているのかを明らかにする。

## 2 1企業の時間発展モデル

2つの中小企業のモデルを構築するため、まず、本節では1つの中小企業のための時間発展を表すモデルを構成し、次節で2つの中小企業のモデルへの拡張を行う。

### 2.1 状態変数及びモデル

1つの中小企業が、取引先の大企業（以後、親企業という）からの注文を受けて会社を運営している状況を考える。中小企業の時間発展をモデル化するためには、まず、その企業の状態を表す変数を設定する必要がある。できるだけ簡単なモデルにするために、時刻  $t$  における会社の状態を表す状態変数として、次の3つを仮定する：会社の規模  $x(t)$ 、会社の技術力  $s(t)$ 、親企業からの単位時間あたりの受注量  $y(t)$ 。これらは、会社の状態の変化を少数の変数を通して理解するための抽象的な変数である。

次に、これらの状態変数の時間発展であるが、まず、会社の規模  $x(t)$  の時間発展を、次のようにモデル化する：

$$\frac{dx}{dt} = -mx + rf(x, y). \quad (1)$$

ここで、 $m, r$  は正のパラメータ、 $f(x, y)$  は単位時間あたりに生じる会社の利益 ( $x, y$  の関数であるとする)

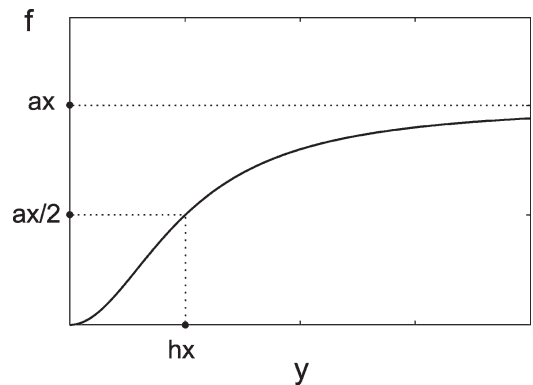


図2 企業の利益  $f(x, y)$

を表している。右辺第1項は、単位時間あたりの会社の維持コストの影響を表しており、会社の規模  $x$  に比例するとしている。また、第2項では、会社の利益  $f$  の一部を設備投資などの会社規模の増大に振り向けていると考えている。会社は受注に従い生産をすると仮定しているので、生産量 = 受注量である。会社の規模に見合う受注があるときは、利益の効率がよく（生産量あたりの利益が多い）、会社の規模に対して受注が少ない場合や逆に多すぎる場合は、利益の効率が悪い（生産量あたりの利益が少ない）と考えられる。このような性質を持った単位時間あたりの利益  $f(x; y)$  を表す関数として、次を仮定する（図2参照）：

$$f(x, y) = \frac{axy^2}{y^2 + (hx)^2}. \quad (2)$$

この場合、生産量 = 受注量  $y$  が非常に少ない場合、生産量あたりの利益は

$$\frac{f(x, y)}{y} \simeq \frac{a}{h^2} \frac{y}{x} \quad (3)$$

となり、会社規模  $x$  に反比例している。つまり、会社規模に比べて受注が少ないと利益の効率が悪い。また、 $y$  が非常に大きいときは

$$f(x, y) \simeq ax \quad (4)$$

となり、単位時間あたりに得られる利益の上限は、会社規模  $x$  に比例している。また、このように十分な受注量  $y$  があるときは、(1) 式は

$$\frac{dx}{dt} \simeq (-m + ra)x \quad (5)$$

となるが、右辺が正でなければ十分な受注があっても、 $x$  が 0 まで減少して会社が消滅してしまうので、 $ra - m > 0$  が成り立っていると仮定する。

次に、会社の技術力  $s$  の時間変化を次のようにモデル化する：

$$\frac{ds}{dt} = -m's + r'f(x, y). \quad (6)$$

ここで、 $m', r'$  は正のパラメータである。右辺第 1 項は、時間とともに既存の技術が陳腐化する影響を表しており、第 2 項は、技術開発等による技術力の向上を表している。ここで、利益  $f$  の一部を技術力の向上にあて、残りを設備投資などの会社規模の拡大（(1) 式右辺第 2 項）に当てていると考えている。

次に受注量  $y$  について考える。いま、親会社から注文を受けるのは 1 企業だけなので、次のように、 $y$  は親会社の製品に対する（単位時間あたりの）需要  $y_p$  に比例すると仮定する：

$$y = by_p. \quad (7)$$

ここで、 $b$  は正の比例定数である。また、 $y_p$  は次の式に従い時間変化すると仮定する：

$$\frac{dy_p}{dt} = r''(y_{\max} - y_p). \quad (8)$$

ここで、 $y_{\max}$  は親会社の製品に対する「潜在的な需要」を表しており、実際の需要  $y_p$  は、 $r''$  を時定数として、それに近づいていくと考えている。ここで、親会社の製品に対する潜在的な需要  $y_{\max}$  は、製品の良し悪しや価格によって変わってくるはずである。本稿では価格の影響までは考慮しないので、単純に製品が持つ技術力の関数であると考え、次のように仮定する：

$$y_{\max} = y_0 s^\theta. \quad (9)$$

ここで、 $y_0 > 0, \theta \geq 0$  である。一般に、技術力が向上すれば、親会社の製品に対する潜在的な需要は大きくなると考えられる。これは、本稿において非常に重要な役割をもつ効果であり、「親会社の製品に対する需要拡大効果」、または単に「需要拡大効果」と呼ぶことにする。(9) 式の  $\theta$  は、この効果の強さに関係するパラメータ（以後、需要拡大指数と呼ぶ）になっている。例えば、 $\theta = 0$  では  $y_{\max}$  は技術力  $s$  に依存せず一定値をとるが、 $\theta > 0$  では  $y_{\max}$  は  $s$  とともに増大する。

## 2.2 平衡状態

以上のようなモデルに従い会社の状態が時間とともに

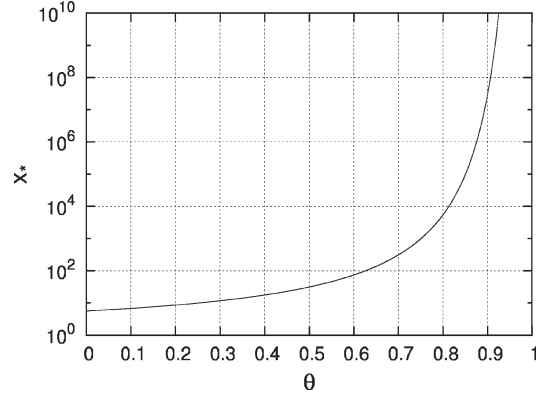


図 3 1 企業のモデルにおける会社規模の平衡値  $x_*$  と  $\theta$  の関係。平衡値  $x_*$  は  $\theta$  が 1 に近づくにしたがい急激に増大する ( $m=0.1, r=0.2, m'=0.1, r'=0.2, a=3, h=0.5, by_0=1.25$ )。

に変化するとき、充分時間が経過した後では時間変化のない平衡状態に落ち着くと考えられる。平衡状態では状態変数の時間微分は 0 となるので、(1), (6) 式の右辺を 0 とおき、平衡状態での会社規模  $x_*$ 、技術力  $s_*$  を求めると、次のようになる：

$$x_* = \left\{ \frac{by_0}{h} \left( \frac{mr'}{m'r} \right)^\theta \left( \frac{ra}{m} - 1 \right)^{1/2} \right\}^{1/(1-\theta)}, \quad (10)$$

$$s_* = \left\{ \frac{by_0}{h} \left( \frac{mr'}{m'r} \right) \left( \frac{ra}{m} - 1 \right)^{1/2} \right\}^{1/(1-\theta)}. \quad (11)$$

これらの平衡値は、 $\theta$  の値が 0 から大きくなるに従い増大し、 $\theta \rightarrow 1$  で発散する（図 3 参照）。したがって、 $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 1$  と仮定する。

## 3 2 企業の時間発展モデル

### 3.1 2 企業のモデルへの拡張

同じ親企業と取引している中小企業が 2 社ある場合への拡張を考える。中小企業間の連携が生み出す効果を調べるのが本稿の目的であるから、中小企業間の連携（協力）をモデルに組み込む必要がある。企業  $i$  ( $i = 1, 2$ ) の会社規模、技術力、単位時間あたりの受注量をそれぞれ  $x_i, s_i, y_i$  で表すとき、1 企業のモデルを拡張して  $x_i, s_i$  の時間変化を次のようにモデル化する：

$$\frac{dx_i}{dt} = -m_i x_i + r_i f_i(x_i, y_i), \quad (12)$$

$$\frac{ds_i}{dt} = -m'_i s_i + r'_i f_i(x_i, y_i) + \sum_{j(\neq i)} c_{ij} r'_j f_j(x_j, y_j). \quad (13)$$

ここで、 $f_i$  は単位時間あたりの企業  $i$  の利益であり、(2) 式と同様に次で与えられる：

$$f_i(x_i, y_i) = \frac{a_i x_i y_i^2}{y_i^2 + (h_i x_i)^2}. \quad (14)$$

また、(13) 式の右辺第3項は、他の中小企業からの技術協力による技術力向上の効果を表している。ここでは、中小企業間の連携を技術協力ととらえ、協力元企業の利益  $f_j$  に比例する協力が行われると仮定している。また、 $c_{ij}$  は企業  $j$  から企業  $i$  への協力の強さを表すパラメータ（以後、協力係数と呼ぶ）である。なお、技術協力の際に、協力元の企業に生じるコストは無視できるとしている。

各中小企業の受注量  $y_i$  は、2社が競合関係にあるか、そうでないかにより変わってくる。例えば、2社が親企業の製品の異なる部品を生産している場合、2社は競合関係にはない。一方、2社が同じ部品を生産している場合は競合関係にあると考えられる。実際は、この2つの場合の複合した状況も存在するだろう。以下では、上に記した2つの場合について考える。

### 3.2 モデル A（競合していない場合）

2つの中小企業が、親企業の製品のまったく別の部品を作っている場合は、次のように、受注量  $y_i$  は親企業の製品に対する需要  $y_p$  に比例していると考えられる：

$$y_1 = b_1 y_p, \quad y_2 = b_2 y_p. \quad (15)$$

ここで、 $y_p$  は (8) 式に従い時間変化すると仮定するが、親企業の製品に対する潜在的な需要  $y_{\max}$  は次のように与えられると仮定する：

$$y_{\max} = y_0 (s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2})^\theta. \quad (16)$$

ここで、 $\alpha_i$  は親企業の製品に対する中小企業  $i$  のつくる部品の相対的な重要度を表している ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ )。親企業の製品の持つ総合的な技術力の程度は、これらを重みとする2企業の技術力の相乗平均  $s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$  で表されると考えた。(9) 式と同様に、 $\theta$  は親企業の製品に対する需要拡大効果の強さを表しているパラメータ（需要拡大指数）である。

### 3.3 モデル B（競合している場合）

2つの中小企業が、親企業の製品の同じ部品を製造している場合、この2企業は、親企業からの受注をめぐり競合関係にある。受注量  $y_i$  は次の式で与えられると仮定する：

$$y_1 = b_0 y_p \frac{s_1^\gamma}{s_1^\gamma + s_2^\gamma}, \quad y_2 = b_0 y_p \frac{s_2^\gamma}{s_1^\gamma + s_2^\gamma}. \quad (17)$$

2社の受注量の合計は、親会社の製品に対する需要  $y_p$  に比例しており、これを2社で分配している。 $\gamma (\geq 0)$  は、この分配を調整しているパラメータ（以後、分配指数とよぶ）である。例えば、 $\gamma=0$  の場合は、受注量は2社に等分される。また、 $\gamma=1$  の場合は、それぞれの会社の技術力  $s_i$  に比例する重みで、受注量は分配される。一般に、 $\gamma$  が大きな値をとるほど、技術力の高い会社を得る受注量は大きくなり、技術力の高い会社が有利となる（図4参照）。本稿の目的は、技術協力の導入の効果を調べることなので、技術協力導入前に、2社が共存していることが前提として必要である。しかし、数値シミュレーションをしてみると、2社の技術協力がないうち（ $c_{ij}=0$ ）、 $\gamma \geq 1$  では、片方の会社の会社規模は時間の経過とともに0に向かい、2社が共存できなかった。また、付録にあるように、 $\gamma > 1$  では、技術協力がないうち2社が共存できないことを解析的に示すことができる。したがって、 $\gamma$  の範囲は  $0 \leq \gamma < 1$  とする。また、 $y_p$  は (8) 式に従い時間変化する。

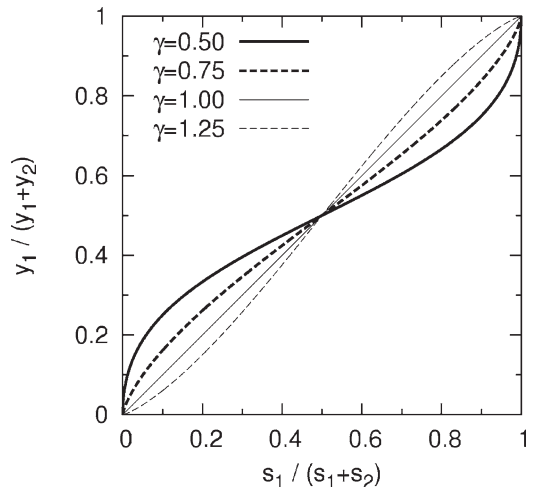


図4 分配指数  $\gamma$  による分配率  $y_1/(y_1+y_2)$  の変化。 $\gamma$  が大きいほど、技術力の高い企業に多くの受注が分配される。

るとし、親企業の製品に対する潜在的な需要  $y_{\max}$  は次式で与えられると仮定する：

$$y_{\max} = y_0 \left( \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2}{y_1 + y_2} \right)^{\theta}. \quad (18)$$

ここで、右辺の括弧内は親企業の製品のもつ技術力の程度の平均値を表している。 $\theta$  の役割はモデル A の場合と同様である。

## 4 2 企業のモデルの解析結果

2 企業のモデル A, B に対して数値的な解析を行い、2 企業間の技術協力の効果が、協力係数  $c_{ij}$ 、需要拡大  $\theta$  指数、分配指数  $\gamma$  の 3 種類のパラメータの値により、どのように変わるのかを調べた。モデル A, B に共通するパラメータは以下のように設定した： $m_1=0.1$ ,  $r_1=0.2$ ,  $m'_1=0.1$ ,  $r'_1=0.2$ ,  $a_1=2.0$ ,  $h_1=0.5$ ,  $m_2=0.1$ ,  $r_2=0.2$ ,  $m'_2=0.1$ ,  $r'_2=0.2$ ,  $a_2=3.0$ ,  $h_2=0.5$ ,  $y_0=5.0$ ,  $r''=0.2$ 。下線部の部分のみが 2 つの企業で異なっており、企業 2 の方が同じ生産量、同じ会社規模でもより多くの利益を出せるように設定してある（企業 2 の方が有利な条件）。モデル A, B に従いシミュレーションを行うと、十分時間が経過した後では、系はある平衡状態に落ち着く。この平衡状態における 2 企業の会社規模  $x_1, x_2$  を様々な  $c_{ij}$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  の値の組み合わせに対して求めて比較した。なお、技術協力は、2 企業間で対称な協力 ( $c_{12}=c_{21}$ ) を仮定した。

### 4.1 モデル A

図 5 は、平衡状態での  $x_1, x_2$  の値が  $c_{12}$  ( $=c_{21}$ ) によりどのように変化するかを  $\theta=0.6, 0.8$  の場合に示した

ものである ( $b_1=0.25$ ,  $b_2=0.25$ ,  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ )。図 5 (a), (b) のどちらの場合でも、 $c_{12}$  が増加し技術協力が大きくなるに従い、最終的に達成できる会社規模（平衡状態での  $x_i$ ）は大きくなっている。また、図の (a) では、 $c_{12}$  とともに  $x_i$  はほぼ直線的に増加しているが、(b) では、 $c_{12}$  の増加とともに加速的に増加している。これから、需要拡大指数  $\theta$  の値が大きいくほど、技術協力が会社規模の増大に与える効果は大きいことが分かる。

### 4.2 モデル B

モデル B の場合にも、モデル A と同様に、平衡状態での  $x_1, x_2$  の値と  $c_{12}$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  の関係を調べた。この際、モデル A との対応を考えて  $b_0=0.5$  と設定した。まず、 $\gamma=0$  の場合に平衡状態での  $x_i$  と  $c_{12}$  の関係を調べると、図 5 とほとんど同じ結果が得られた（グラフは省略している）。これは、 $\gamma=0$  の場合は、2 企業は等しい受注を得るため競合関係にないことから当然の結果である。図 6 は、 $\gamma=0.5, 0.75$  の場合に、図 5 と同様のグラフを描いたものである。 $\gamma=0.5$  の場合のグラフ (a), (b) は、モデル A の場合（図 5）と似たような傾向を示している。一方、 $\gamma=0.75$  の場合のグラフ (c), (d) は少し傾向が異なる。図 6(c) に注目すると、 $c_{12}=0$ （技術協力が無い）のとき、2 社の会社規模にはかなりの差がある。これは、 $\gamma$  の値が大きいため、技術力の高い企業により多くの受注が分配される効果が強く働いているためである。 $c_{12}$  を 0 から増加させていくと、上位の企業の会社規模  $x_2$  はいったん減少していき、その後上昇に転じている。これから、小規模の技術協力は上位の企業にとってはマイナスに作用し、ある程度大きな技術協力を行ったらじめてプラスの効果が得ら

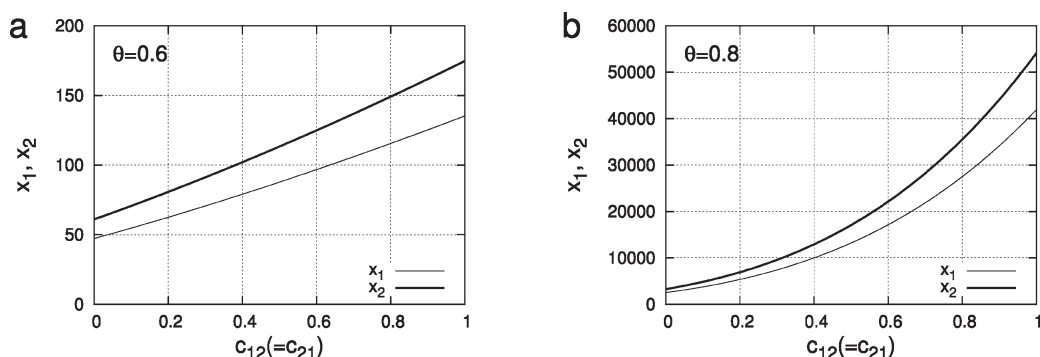
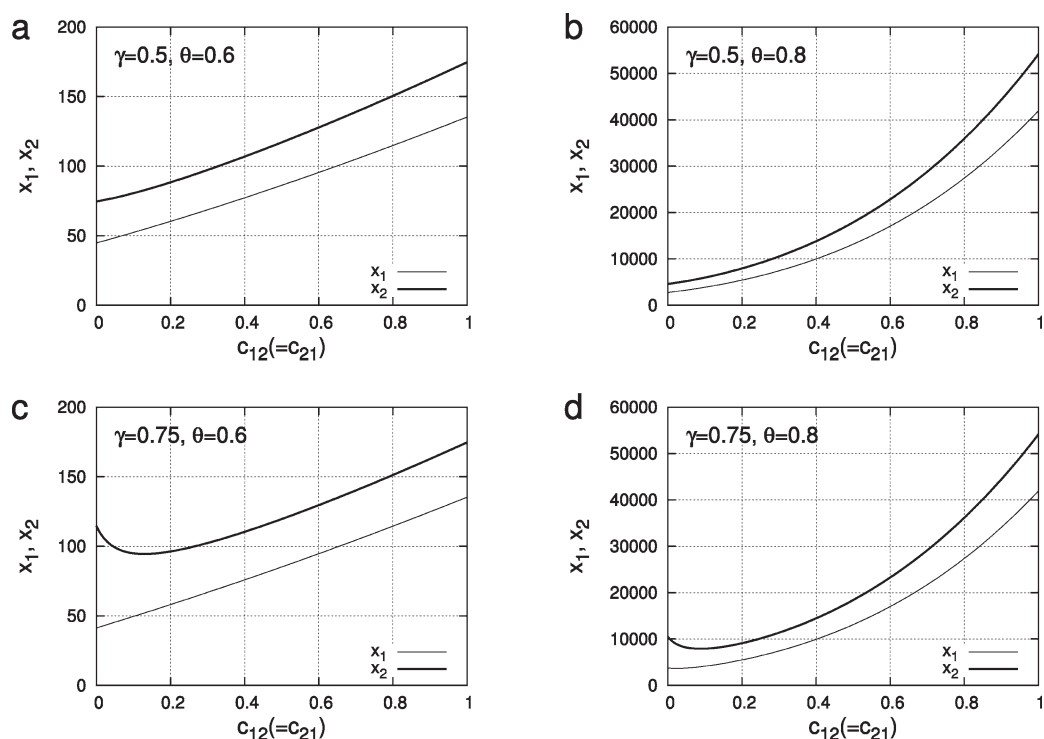
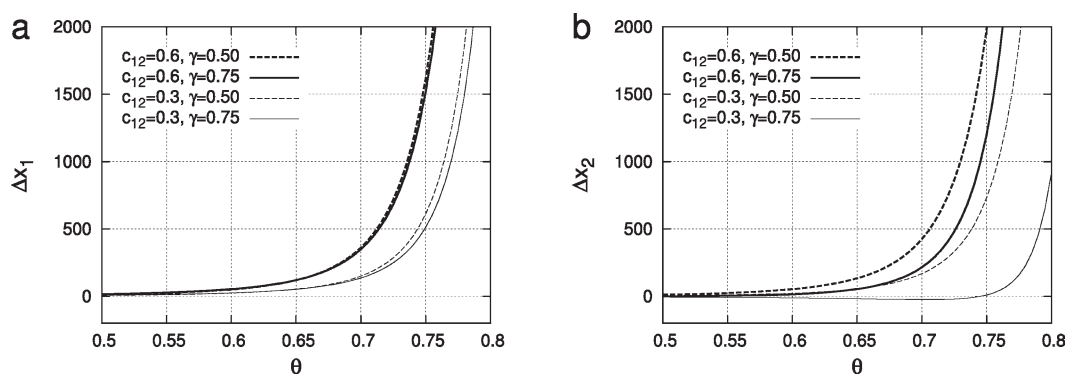


図 5 平衡状態での会社規模  $x_1, x_2$  と協力係数  $c_{12}$  の関係（モデル A）



図6 平衡状態での会社規模  $x_1, x_2$  と協力係数  $c_{12}$  の関係 (モデル B)図7 技術協力による会社規模の増加量  $\Delta x_1, \Delta x_2$  と需要拡大指数  $\theta$  の関係 (モデル B)

れることが分かる。図6(d)をみると、(c)と同様の傾向であるが、上位の企業の会社規模  $x_2$  が上昇に転じる  $c_{12}$  の値が小さく、また、技術協力の効果も(c)の場合と比べて格段に大きくなっている。

図7は、技術協力を導入することによる会社規模の平衡値の増加量  $\Delta x_1, \Delta x_2$  と  $\theta$  の関係をグラフに描いたものである。 $\theta$  が大きくなるに従い、 $\Delta x_1, \Delta x_2$  は急

激に増加することが分かる。上位の企業の場合(b)を見ると、 $c_{12}=0.3, \gamma=0.75$  の場合では、 $\theta$  が約0.75より小さい領域では、 $\Delta x_2$  はマイナスになっている。このように、 $c_{12}, \theta$  の値が小さく、 $\gamma$  が大きい場合には、上位の企業にとって技術協力はマイナスの影響を与える傾向がある。逆に、技術協力が上位の企業にもプラスの影響を与えるためには、これらの3つのパラメー

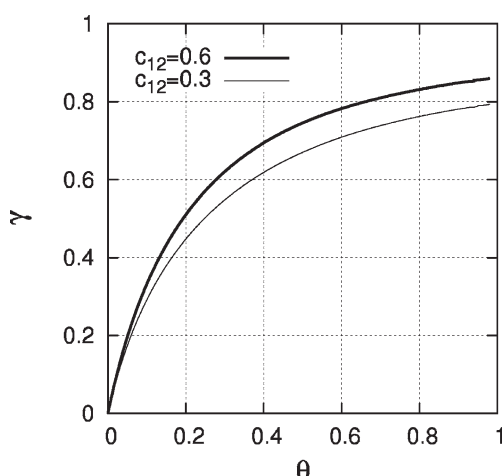


図8 技術協力により上位の企業の会社規模が増加するための条件（モデルB）。それぞれの $c_{12}$ の値の場合に対し、曲線より右下の領域では技術協力により会社規模は増大し、左上の領域では減少する。

タの間にある関係が満たされている必要がある。図8は、技術協力の導入により上位の企業の会社規模が増加するための条件を $(\theta, \gamma)$ 空間でまとめたものである。それぞれの $c_{12}$ の場合に対し、曲線より右下の領域では、上位の企業の会社規模の増加量はプラスになり、左上の領域ではマイナスになる。 $\theta$ が大きく、 $\gamma$ が小さいほど、技術協力による会社規模の増加は起こりやすいと言える。

## 5 考察とまとめ

本稿では、中小企業間の連携による相互発展の効果を数理的に考察するために、できるだけ簡単な数理モデルを構築し、技術協力が2社間で対称（ $c_{12}=c_{21}$ ）な場合について解析を行った。解析の結果をまとめると以下ようになる。技術協力の導入により達成できる会社規模（平衡状態の会社規模）の大きさに一番影響を与えるのは、需要拡大指数 $\theta$ である。 $\theta$ が1に近づくほど、技術協力により到達できる会社規模は格段に大きくなる。2社間の受注をめぐる競争が強い（分配指数 $\gamma$ が大きい）ときは、協力の規模が小さいと、上位の企業は技術協力により返ってマイナスの影響を受けることがある。一方、下位の企業は技術協力により常にプラスの効果を受ける。したがって、協力が2社

ともにプラスの効果を与えるためには、ある程度の規模の協力が必要である。また、協力が十分に大きい（ $c_{12} \approx 1$ ）ときは、協力により最終的に到達できる会社規模の大きさは、分配指数 $\gamma$ にはほとんど依存しない。以上から、技術協力の導入による相互発展の効果を大きくするためには、親会社の製品に対する需要拡大効果に関わる需要拡大指数 $\theta$ を大きくすること、中途半端にならない規模の大きい協力を行うことがポイントになる。

上に述べたように、2社間の競争が強く、協力の規模が十分でないときは、協力により上位の企業にマイナスの影響が出やすいが、これは協力係数の対称性（ $c_{12}=c_{21}$ ）を仮定したからだと考えられる。協力係数の対称性ではなく、技術協力の絶対量の対称性（ $c_{12}r_2f_2=c_{21}r_1f_1$ ）を仮定した場合は、このようなマイナスの効果は生じにくいと予想される。また、本稿のモデルでは、価格の影響は考慮しなかった。競合している2社の製品に価格差があれば、親企業からの受注に対して影響を与えられと考えられる。このような価格の影響まで取り入れ、なおかつ解析のしやすい簡単な数理モデルを開発していくことは、今後の課題である。

本稿では、中小企業間の連携（協力）が生み出す相互発展の効果を数理的に考察するために、数理モデルを構築し基本的な解析を行った。今後、このモデルが、企業間の競争や協力について考察する際の基礎となるモデルとして、役立つことを願っている。

## 謝 辞

本研究は平成23年度科学研究費補助金基盤(C)「持続可能な地域産業構造のあり方の提示～「企業生態学」の構築～」(研究代表者：佐藤飛鳥 東北工業大学講師，課題番号：22530237)の助成を受けて行われた。研究分担者，(企業生態学構築のために特別に依頼した)共同研究者はそれぞれ以下のとおり(五十音順)。研究分担者：穴澤正宏，阿部敏哉，沢田康次，渡部順一。共同研究者：佐々木浩(宮城県経済商工観光部新産業振興産学連携推進班主査)，高橋保幸(宮城県経済商工観光部産業人材対策課兼雇用対策課主任主査)。



付録モデル B の分配指数  $\gamma$  と 2 社の共存

技術協力の導入による相互発展の効果を調べるのが本稿の目的であるので、その前提として、技術協力の導入の前に 2 社が共存していることが必要である。この付録では、技術協力の導入前 ( $c_{ij}=0$ ) のモデル B において、 $\gamma$  の値と 2 社の共存の関係について記す。生物生態学では、競争関係にある 2 つの生物種の個体群の共存と密接に関係する概念として、しばしば「侵入可能性」を問題にする [6, 7]。これは、ある生物種の個体群のみが存在するときの安定平衡状態において、別の生物種がわずかに侵入したとき、排除されることなく増加していけるかという問題である。種 1 のみが存在するときの平衡状態において種 2 が侵入可能であり、逆に、種 2 のみが存在するときの平衡状態において種 1 が侵入可能であれば、2 種の個体群が存在するある初期状態から時間が経過するときに、片方の種が排除されることは起こらない。したがって、この場合、2 種は共存できる。同様の侵入可能性を、本稿の技術協力導入前のモデル B に対して調べると、「 $\gamma>1$  であると侵入不可能である」ことを、以下のように示すことができる。

まず、対象とするモデルは、3 節のモデル B で  $c_{ij}=0$  とおいたものである。以下では、企業 1 のみが存在するときの平衡状態における企業 2 の侵入可能性を調べる。企業 1 のみが存在するときの平衡状態における  $x_1, s_2$  の値をそれぞれ  $x_{1*}, s_{1*}$  で表す ((10), (11) 式参照)。このとき、企業 2 の動態は、(12), (13) 式から次の式で記述される：

$$\frac{dx_2}{dt} = -m_2 x_2 + r_2 f_2(x_2, y_2), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{ds_2}{dt} = -m'_2 s_2 + r'_2 f_2(x_2, y_2). \quad (\text{A.2})$$

ここで、企業 2 がわずかに侵入したときの動態を考察するため、 $x_2, s_2, y_2$  は非常に小さい量であると考え。このとき、(9) 式の  $y_{\max}$  は

$$y_{\max} = y_0 \left( \frac{y_1 s_{1*} + y_2 s_2}{y_1 + y_2} \right)^\theta \simeq y_0 s_{1*}^\theta \quad (\text{A.3})$$

と簡単になる。平衡状態では  $y_p = y_{\max}$  なので、上式を使うと企業 2 の受注量は、(17) 式から

$$y_2 = b_0 y_p \frac{s_2^\gamma}{s_{1*}^\gamma + s_2^\gamma} \simeq \alpha_1 s_2^\gamma \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで  $\alpha_1 = b_0 y_0 s_{1*}^{\theta-\gamma}$  である。以上を、(A.1) 式に代入すると、平衡点において  $dx_2/dt > 0$  である条件として次式が得られる：

$$-m_2(\alpha_1^2 s_2^{2\gamma} + h_2^2 x_2^2) + r_2 a_2 \alpha_1^2 s_2^{2\gamma} > 0. \quad (\text{A.5})$$

同様に、(A.2) 式から、平衡点において  $ds_2/dt > 0$  である条件は次のようになる：

$$-m'_2(\alpha_1^2 s_2^{2\gamma} + h_2^2 x_2^2) + r'_2 a_2 \alpha_1^2 s_2^{2\gamma-1} > 0. \quad (\text{A.6})$$

これは、整理すると次のような  $x_2$  についての 2 次不等式である：

$$m'_2 h_2^2 x_2^2 - r'_2 a_2 \alpha_1^2 s_2^{2\gamma-1} x_2 + m'_2 \alpha_1^2 s_2^{2\gamma} < 0. \quad (\text{A.7})$$

この不等式を満たす  $x_2$  の領域が存在するためには、判別式  $D \geq 0$  が成り立っていることが必要である。判別式  $D$  は

$$D = \alpha_1^2 s_2^{2\gamma} (r'_2{}^2 a_2^2 \alpha_1^2 s_2^{2\gamma-2} - 4m'_2{}^2 h_2^2) \quad (\text{A.8})$$

となるが、 $\gamma>1$  の場合、 $s_2$  が十分 0 に近いところでは、 $D<0$  となってしまう。したがって、 $\gamma>1$  の場合、 $s_2=0$  の十分近くでは、必ず  $ds_2/dt < 0$  となっている。一方、

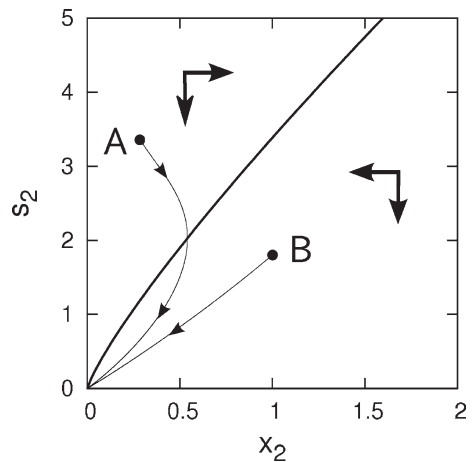


図9 企業 1 のみが存在しているときの平衡点における企業 2 の侵入可能性 ( $\gamma>1$  の場合の例)。太い実線以上では  $dx_2/dt=0$ 、この線より左上の領域では  $dx_2/dt>0$ 、右下の領域では  $dx_2/dt<0$  である。太い矢印は、それぞれの領域で、時間の経過とともに  $x_2, s_2$  が動く方向を示している。点 A, B から出発した企業 2 の状態は、時間の経過とともにどちらも原点に向かう。このように、 $\gamma>1$  のとき、企業 2 は排除されてしまい侵入することができない。

$dx_2/dt$  の符号は、図 9 に示したように、 $dx_2/dt=0$  を満たす曲線を境にして、正の領域と負の領域がある。また、図 9 には、 $\gamma>1$  の場合に、それぞれの領域において、 $x_2, s_2$  が時間とともにどの方向に動いていくかを太い矢印で示してある。これをよく見ると、企業 2 の状態を示す点  $(x_2, s_2)$  は、時間とともに原点に向かっていくことがわかる。すなわち、 $\gamma>1$  の場合、企業 2 は侵入することができず、排除されることがわかる。以上の議論は、企業 1 と 2 を入れ替えても同様に成り立つ。したがって、 $\gamma>1$  の場合には、1 企業のみが存在するときの平衡点において、別の企業は侵入することができないことが結論できる。

### 参 考 文 献

- [1] 佐藤飛鳥，渡部順一，阿部敏哉，穴澤正宏，優良中小製造企業の共通点—宮城県製造業者へのヒアリング調査から—，東北工業大学紀要Ⅱ：人文社会科学編，Vol. 31, pp. 57-67, 2011.
- [2] P. Turchin. *Complex population dynamics : a theoretical/empirical synthesis*. Princeton University Press, 2003.
- [3] R.M.C. May and A.R. McLean. *Theoretical ecology : principles and applications*. Oxford University Press, 2007.
- [4] 巖佐 庸. 数理生物学入門—生物社会のダイナミックスを探る—. 共立出版, 1998.
- [5] 嶋田正和，山村則男，粕谷英一，伊藤嘉昭. 動物生態学新版. 海游舎, 2005.
- [6] P. Chesson. Mechanisms of maintenance of species diversity. *Annual Review of Ecology and Systematics*, Vol. 31, pp. 343-366, 2000.
- [7] S. Hartley and B. Shorrocks. A general framework for the aggregation model of coexistence. *Journal of Animal Ecology*, Vol. 71, pp. 651-662, 2002.

[1] 佐藤飛鳥，渡部順一，阿部敏哉，穴澤正宏，優良